# La Méthode du Simplexe : Guide Conceptuel

Algèbre linéaire et optimisation pas à pas
Généré par Simplex Solver Pro

## 1. La Forme Standard et la Base Mathématique

Tout problème de Programmation Linéaire (PL) doit être mis sous forme standard avant d'appliquer l'algorithme du simplexe. Mathématiquement, nous cherchons à optimiser $\max Z = c^T x$ sous les contraintes $Ax = b$ avec $x \geq 0$.

- **Contraintes $\leq$ :** On ajoute une *variable d'écart* ($+s_i$), qui représente la quantité de ressource non consommée.
- **Contraintes $\geq$ :** On soustrait une *variable d'excédent* ($-e_i$) et on ajoute une *variable artificielle* ($+a_i$) pour garantir une base admissible initiale.
- **Contraintes $=$ :** On introduit une *variable artificielle* ($+a_i$) dans le seul but de former une matrice identité initiale et d'obtenir une Solution Réalisable de Base (SRB).

## 2. L'Algorithme de Base : Critères de Pivotage

La méthode du simplexe chemine de sommet en sommet adjacent sur le polyèdre convexe des solutions admissibles, en améliorant strictement la fonction objectif. Dans chaque tableau simplexe, les variables se divisent en **Variables de Base** (formant la base $B$) et **Variables Hors Base** (de valeur nulle).

### A. Critère d'Entrée (Quelle variable entre en base ?)

On évalue les coûts réduits représentés par la ligne des indicateurs $Z_j - C_j$. Cette valeur indique la variation nette de la fonction objectif par unité de la variable entrant en base.

- **Maximisation :** Entre en base la variable ayant le coût réduit $Z_j - C_j$ le **plus négatif**. L'optimum est atteint lorsque tous les $Z_j - C_j \geq 0$.
- **Minimisation :** Entre en base la variable ayant le coût réduit $Z_j - C_j$ le **plus positif**. L'optimum est atteint lorsque tous les $Z_j - C_j \leq 0$.

### B. Critère de Sortie (Test du Ratio Minimum)

Ce test garantit que la nouvelle solution ne sort pas du domaine admissible (respect de la non-négativité) :

$$\theta = \min \left\{ \frac{\text{Membre de Droite (MD)}}{\text{Coefficient de la Colonne Pivot}} \;\middle|\; \text{Coefficient} > 0 \right\}$$

La variable associée à la ligne réalisant le ratio positif minimal $\theta$ quitte la base. Si tous les coefficients de la colonne pivot sont $\leq 0$, le problème est **Non Borné**.

# 3. Méthodes d'Initialisation (Variables Artificielles)

Lorsque le problème initial ne comporte pas de base identité évidente, on a recours aux méthodes à variables artificielles :

- **Méthode du Grand M :** On pénalise lourdement les variables artificielles dans la fonction objectif avec un coefficient très élevé ($-M \cdot a_i$ en maximisation, $+M \cdot a_i$ en minimisation, où $M$ est une constante positive arbitrairement grande). L'algorithme élimine ces variables de la base dès les premières itérations.
- **Méthode des Deux Phases :**
  - *Phase I :* On minimise exclusivement la somme des variables artificielles ($W = \sum a_i$). Si la valeur minimale est 0, les variables artificielles ont disparu et l'on obtient une SRB valide. Si $\min W > 0$, le programme linéaire initial est **Irréalisable (Inadmissible)**.
  - *Phase II :* On réintroduit la fonction objectif originale $Z$ et on poursuit l'optimisation en partant de la base admissible obtenue en Phase I.

# 4. Cas Particuliers (Analyse Post-Optimale et Géométrie)

- **Dégénérescence :** Survient lors d'une égalité dans le test du ratio minimum. Une variable de base prend alors la valeur zéro à l'itération suivante. Géométriquement, plusieurs contraintes redondantes concourent au même sommet. Elle peut engendrer un cyclage infini en l'absence de la règle de Bland.
- **Optima Multiples (Solutions Alternatives) :** Dans le tableau optimal, une variable *hors base* a un coût réduit $Z_j - C_j = 0$. Son entrée en base modifie les coordonnées du sommet sans altérer la valeur optimale de $Z$. La fonction objectif est parallèle à une contrainte active.
- **Irréalisabilité :** Dans le tableau final du Grand M (ou à la fin de la Phase I), une variable artificielle subsiste dans la base avec une valeur $> 0$. Le domaine de faisabilité est vide.

*Besoin de vérifier vos tableaux ou d'analyser un cas dégénéré ?*
*Saisissez votre matrice et visualisez les itérations pas à pas sur :*
**simplexsolverpro.com/fr**