O Método Simplex: Guia Conceitual

Álgebra linear e otimização passo a passo
Gerado por Simplex Solver Pro

1. A Forma Padrão e a Base Matemática

Todo problema de Programação Linear (PL) deve ser convertido para sua forma padrão antes da aplicação do algoritmo. Matematicamente, busca-se otimizar $\max Z = c^T x$ sujeito a $Ax = b$ com $x \geq 0$.

- **Restrições $\leq$:** Adiciona-se uma *variável de folga* ($+s_i$), que quantifica a capacidade ou recurso não utilizado.
- **Restrições $\geq$:** Subtrai-se uma *variável de excesso* ($-e_i$) e adiciona-se uma *variável artificial* ($+a_i$) para assegurar uma base inicial viável.
- **Restrições $=$:** Introduz-se uma *variável artificial* ($+a_i$) com a finalidade exclusiva de formar uma matriz identidade e encontrar uma Solução Básica Inicial Viável (SBIV).

2. O Algoritmo Base: Critérios de Pivoteamento

O método Simplex move-se de vértice em vértice sobre o poliedro convexo de soluções viáveis, melhorando monotonicamente o valor da função objetivo. Cada quadro simplex representa uma SBIV onde as variáveis dividem-se em **Básicas** (formando a base B) e **Não Básicas** (com valor nulo).

A. Critério de Entrada (Qual variável entra na base?)

Avaliam-se os custos reduzidos representados pela linha $Z_j - C_j$. Esse coeficiente expressa o ganho líquido na função objetivo por unidade da variável que ingressa na base.

- **Maximização:** Entra na base a variável com o coeficiente $Z_j - C_j$ **mais negativo**. A iteração encerra-se (ótimo) quando todos os $Z_j - C_j \geq 0$.
- **Minimização:** Entra na base a variável com o coeficiente $Z_j - C_j$ **mais positivo**. O ótimo é atingido quando todos os $Z_j - C_j \leq 0$.

B. Critério de Saída (Teste da Razão Mínima)

Garante que a nova solução básica permaneça dentro da região de factibilidade (respeitando a não negatividade):

$$\theta = \min \left\{ \frac{\text{Lado Direito (LD)}}{\text{Coeficiente da Coluna Pivô}} \;\middle|\; \text{Coeficiente} > 0 \right\}$$

A variável da linha com a menor razão positiva θ deixa a base. Se todos os coeficientes da coluna pivô forem ≤ 0, o problema é **Ilimitado**.

3. Métodos de Inicialização (Variáveis Artificiais)

Quando o problema original não fornece uma base canônica evidente, aplicam-se métodos de variáveis artificiais:

- **Método do Big-M:** Atribui às variáveis artificiais uma penalidade massiva na função objetivo ($-M \cdot a_i$ para maximização, $+M \cdot a_i$ para minimização, onde M é um valor escalar arbitrariamente grande). O algoritmo força sua saída rápida da base para zerar a penalidade.
- **Método das Duas Fases:**
  - *Fase I:* Minimiza exclusivamente a soma das variáveis artificiais ($W = \sum a_i$). Se o valor mínimo for 0, obtém-se uma SBIV legítima e as artificiais são descartadas. Se $\min W > 0$, o problema original é **Inviável**.
  - *Fase II:* Restaura-se a função objetivo original Z e prossegue-se com a otimização partindo da base obtida na Fase I.

4. Casos Especiais (Geometria e Análise Pós-Ótima)

- **Degenerescência:** Ocorre quando há empate no teste da razão mínima. Na iteração seguinte, uma variável básica assume valor zero. Geometricamente, significa que restrições redundantes interceptam o mesmo vértice. Pode levar a ciclos infinitos caso a regra de Bland não seja adotada.
- **Múltiplos Ótimos (Soluções Alternativas):** No quadro ótimo, uma variável *não básica* possui custo reduzido $Z_j - C_j = 0$. Pivoteá-la altera os valores das variáveis sem modificar o valor ótimo de Z. A função objetivo é paralela a uma restrição ativa.
- **Inviabilidade:** No quadro final do Big-M (ou ao término da Fase I), uma variável artificial permanece na base com valor > 0. A região de viabilidade é vazia.

Precisa validar seus quadros simplex ou analisar casos degenerados?
Insira sua matriz e visualize o passo a passo completo em:
simplexsolverpro.com/pt