Симплекс-метод: Концептуальное руководство

Линейная алгебра и пошаговая оптимизация
Подготовлено Simplex Solver Pro

1. Стандартная форма и математический базис

Каждая задача линейного программирования (ЗЛП) перед применением симплекс-метода приводится к стандартной (канонической) форме. Математически мы ищем $\max Z = c^T x$ при ограничениях $Ax = b$ и $x \geq 0$.

- **Ограничения $\leq$:** Прибавляется *дополнительная переменная слабины* $(+s_i)$, обозначающая неиспользованный объем ресурса.
- **Ограничения $\geq$:** Вычитается *избыточная переменная* $(-e_i)$ и вводится *искусственная переменная* $(+a_i)$ для обеспечения начального базиса.
- **Ограничения $=$:** Вводится *искусственная переменная* $(+a_i)$ исключительно для формирования начальной единичной матрицы и нахождения начального опорного плана (базового допустимого решения).

2. Базовый алгоритм: Критерии выбора ведущих элементов

Симплекс-метод последовательно переходит от одной крайней точки (вершины) многогранника допустимых решений к соседней, монотонно улучшая целевую функцию. В каждой симплекс-таблице переменные подразделяются на **базисные** (образующие базисную матрицу B) и **свободные (небазисные)**, принимающие нулевые значения.

А. Критерий ввода в базис (выбор ведущего столбца)

Оцениваются симплекс-разности (относительные оценки), представляющие индексную строку $\Delta_j = Z_j - C_j$. Это значение показывает прирост целевой функции на единицу вводимой переменной.

- **Максимизация:** В базис вводится переменная с наиболее отрицательной оценкой Δ_j. Оптимум достигается, когда все $\Delta_j \geq 0$.
- **Минимизация:** В базис вводится переменная с наиболее положительной оценкой Δ_j. Оптимум достигается, когда все $\Delta_j \leq 0$.

Б. Критерий вывода из базиса (симплекс-отношения / тест минимального отношения)

Гарантирует сохранение допустимости плана и соблюдение условия неотрицательности переменных:

$$\theta = \min \left\{ \frac{\text{Правая часть (ПЧ)}}{\text{Коэффициент ведущего столбца}} \,\middle|\, \text{Коэффициент} > 0 \right\}$$

Переменная строки с минимальным положительным отношением θ выводится из базиса. Если в ведущем столбце все коэффициенты ≤ 0, целевая функция задачи является **неограниченной** на допустимом множестве.

3. Методы начального базиса (искусственные переменные)

Когда исходная система ограничений не содержит очевидного единичного базиса, применяются методы искусственного базиса:

- **Метод больших M (Big-M):** Искусственным переменным назначается штрафной коэффициент M в целевой функции ($-M \cdot a_i$ для максимизации, $+M \cdot a_i$ для минимизации, где M — достаточно большое положительное число). Алгоритм стремится вытеснить искусственные переменные из базиса на первых итерациях.
- **Двухфазный симплекс-метод:**
  - *Фаза I:* Минимизируется вспомогательная целевая функция — сумма всех искусственных переменных ($W = \sum a_i$). Если $\min W = 0$, получен допустимый базис исходной задачи без искусственных переменных. Если $\min W > 0$, исходная ЗЛП **несовместна (недопустима)**.
  - *Фаза II:* Исходная целевая функция Z восстанавливается, и решение продолжается из допустимого базиса, найденного на Фазе I.

4. Особые случаи (геометрия и послеоптимальный анализ)

- **Вырожденность:** Возникает при равенстве нескольких минимальных отношений θ. В следующей итерации одна из базисных переменных принимает значение 0. Геометрически это означает, что в одной вершине пересекается больше гиперплоскостей, чем размерность пространства. Во избежание зацикливания применяется правило Бланда.
- **Альтернативный оптимум (множественные решения):** В оптимальной таблице небезисная переменная имеет нулевую оценку $\Delta_j = 0$. Ее ввод в базис приводит к новой вершине с тем же оптимальным значением Z. Геометрически целевая функция параллельна активной грани ограничений.
- **Недопустимость:** В итоговой таблице метода Big-M (или по окончании Фазы I) хотя бы одна искусственная переменная остается в базисе со значением > 0. Допустимая область задачи пуста.

Хотите проверить симплекс-таблицу или разобрать вырожденный случай?
Введите матрицу и изучайте пошаговое математическое решение на:
simplexsolverpro.com/ru